(α.1) (α) Το σύνολο $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$ των φυσικών αριθμών είναι ισοπληθικό με το σύνολο
$A=\{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\}=\{2,3,4,\dots\}$
Πράγματι, η συνάρτηση $f:\mathbb{N}\to A$ $f(n)=n+1$ είναι (όπως άμεσα προκύπτει) 1-1 κ' επί. Άρα $\mathbb{N}\simeq A$

(β) Αν συμβολίσουμε με $\mathbb{N}_a$ το σύνολο των περιττών φυσικών
($\mathbb{N}_a=\{2,4,6,\dots\}$, $\mathbb{N}_n=\{1,3,5,\dots\}$, τότε $\mathbb{N}\simeq\mathbb{N}_a$ (αφού η $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_a$
$f(n)=2n$ είναι 1-1 κ' επί)
κ' $\mathbb{N}\simeq\mathbb{N}_n$, αφού η $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}_n$
$g(n)=2n-1$ είναι 1-1 κ' επί
Επίσης, $\mathbb{N}_a\simeq\mathbb{N}_n$

(γ) Το σύνολο $\mathbb{Z}=\{\dots -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\dots\}$

$$\begin{array}{ccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{array}$$

Είναι ισοπληθικά με το $\mathbb{N}$

Ορίζουμε $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & \mathbb{N}\ x\geq 0 \\ -2x, & x<0 \end{cases}$$

Η f αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι 1-1 κ' επί

Άρα $\mathbb{Z}\simeq\mathbb{N}$

δ) $\forall a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$ ισχύει $[0,1]\simeq[a,b]$
Πράγματι, η συνάρτηση $f:[0,1]\to[a,b]$
$f(x)=a+x(b-a)$ είναι καλά ορισμένη κ' είναι (όπως εύκολα ελέγχεται)
1-1 κ' επί
Αν $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ με $\gamma<\delta$ $[0,1]\simeq[\gamma,\delta]$
Χρησιμοποιώντας ότι η $\simeq$ είναι συμμετρική κ' μεταβατική προκύπτει $[a,b]\simeq[\gamma,\delta]$

→ Αν $y<0$, τότε λόγω της (2) αναγκαστικά $x<0$ (άρα $|x|=-x$)

$$\frac{x}{1-x}=y \Leftrightarrow x=y-xy \Leftrightarrow x(1+y)=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1+y}$$

Για αυτό το x ισχύει $x<0$, διότι $-1<y<0$. Άρα $f(x)=y$

[Με την παραπάνω μέθοδο βρίσκουμε ότι $f^{-1}(y)=\frac{y}{1-|y|}$]

$A \simeq B \Leftrightarrow \exists f: A \to B$ 1-1 κ' επί

$\mathbb{R} \simeq (-1,1)$

$f: \mathbb{R} \to (-1,1)$

$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$

<u>2ος τρόπος</u>: Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με τύπο $f(x)=\arctan(x)$ είναι 1-1 κ' επί

Άρα $\mathbb{R} \simeq \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Επειδή $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \simeq (-1,1)$ προκύπτει ότι $\mathbb{R} \simeq (-1,1)$

δ) $[0,1] \simeq [0,1)$

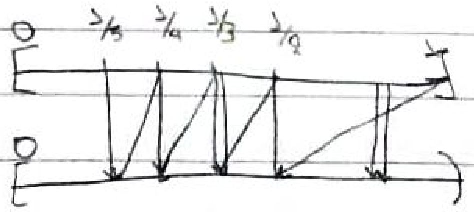
<u>Απόδειξη</u>:

Έστω $A=[0,1]-\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

$=[0,1]-\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$

Ορίζουμε $f:[0,1] \to [0,1)$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \in A \\ \frac{1}{n+1}, & x=\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$



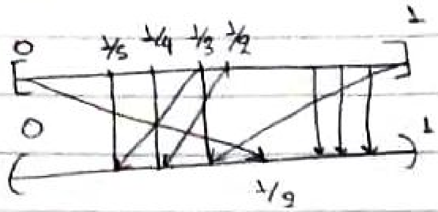
Η f είναι 1-1 κ' επί

Επομένως, $[0,1] \simeq [0,1)$

ω) $[0,1] \simeq (0,1)$

Έστω $B = (0,1) - \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Ορίζουμε $g : [0,1] \to (0,1)$



<u>Άσκηση:</u> (Ειδική περίπτωση)

Αν $A_1 \simeq B_1$, $A_2 \simeq B_2$

κ' $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, τότε $A_1 \cup A_2 \simeq B_1 \cup B_2$

<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον $A_1 \simeq B_1$ $\exists f_1 : A_1 \to B_1$ 1-1 κ' επί

Εφόσον $A_2 \simeq B_2$ $\exists f_2 : A_2 \to B_2$ 1-1 κ' επί

Ορίζουμε $f : A_1 \cup A_2 \to B_1 \cup B_2$ $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in A_1 \\ f_2(x), & x \in A_2 \end{cases}$ $[f : f_1 \cup f_2]$

<u>Σημείωση:</u> Δεν ισχύει το συμπέρασμα αν παραλείψουμε την υπόθεση $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

<u>π.χ.</u> $\{1\} \simeq \{2\}$, $\{1\} \simeq \{3\}$

ενώ $\{1\} \not\simeq \{2\} \cup \{3\}$

<u>Άσκηση:</u> (Γενική περίπτωση)

Έστω I σύνολο

$(A_i)_{i \in I}$ μια οικογένεια ανά δύο συνόλων (δηλ. $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ για $i, j \in I$ με $i \neq j$)

ώστε $A_i \simeq B_i$ $\forall i \in I$

Νδο $\bigcup_{i \in I} A_i \simeq \bigcup_{i \in I} B_i$

<u>Απόδειξη:</u> $\forall i \in I$ Εφόσον $A_i \simeq B_i$ $\exists f_i : A_i \to B_i$ 1-1 κ' επί

Ορίζουμε $f = \bigcup_{i \in I} f_i$

[Δηλ. $f : \bigcup_{i \in I} A_i \to \bigcup_{i \in I} B_i$

$f(x) = f_i(x)$ αν $x \in A_i$]

Το γεγονός ότι $(A_i)_{i\in J}$ είναι ξένα ανά δύο εξασφαλίζει ότι η f είναι (καλά ορισμένη) συνάρτηση

Η f είναι 1-1:

Αν $x,y\in\bigcup_{i\in J} A_i$ κ' $z\in\bigcup_{i\in J} B$

ώστε $(x,z)\in f$ $\quad (y,z)\in f$

τότε $\exists i\in I \quad (x,z)\in f_i \Rightarrow x\in A_i \quad z\in B_i$

$\exists j\in I \quad (y,z)\in f_j \Rightarrow y\in A_j \quad z\in B_i$

Επειδή τα $(B_i)_{i\in J}$ είναι ξένα ανά δύο κ' $z\in B_i\cap B_j$ προκύπτει $i=j$

κ' επειδή η $f_i: A_i\to B_i$ είναι 1-1

Άρα $x,y\in A_i$, $z\in B_i$ θα έχουμε $x=y$. Επομένως η f είναι 1-1

Η f είναι επί: Έστω $y\in\bigcup_{i\in J} B_i$, τότε $\exists i_0\in I$ $y\in B_{i_0}$

Επειδή η $f_{i_0}: A_{i_0}\to B_{i_0}$ είναι επί

$\exists x\in A_{i_0}$

$f_{i_0}(x)=y$, τότε $f(x)=y$ Άρα f επί

Άσκηση: Αν $A\simeq\Gamma$ κ' $B\simeq\Delta$, τότε $A\times B\simeq\Gamma\times\Delta$

Απόδειξη: $\exists f: A\to\Gamma$ 1-1 κ' επί

$\exists g: B\to\Delta$ 1-1 κ' επί

Ορίζουμε $h: A\times B\to\Gamma\times\Delta$

$h(x,y)=(f(x),g(x))$ η οποία εύκολα ελέγχεται ότι είναι 1-1 κ' επί

Άρα $A\times B\simeq\Gamma\times\Delta$

Άσκηση: (Γενίκευση)

Αν $(A_i)_{i\in I}$ οικ. συνόλων $(B_i)_{i\in I}$ οικ. συν. $A_i\simeq B_i$ $\forall i\in I$,

τότε $\bigcap_{i\in I} A_i\simeq\bigcap_{i\in I} B_i$

Απόδειξη: $\forall i \in I \ \exists f_i : A_i \to B_i$

Ορίζουμε $f: \prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} B_i$ 1-1 κ' επί

με την $f(x_i)_{i\in I} = (f(x_i))_{i\in I}$

Η f (εύκολα ελέγχεται άσκηση) είναι 1-1 κ' επί

Άρα $\prod_{i\in I} A_i \simeq \prod_{i\in I} B_i$